Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie
Blatt 3
Abgabe: 08.11. 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Konstruieren Sie eine stetige semi-algebraische Funktion

$$f : \mathbb{R} \to [0,1]$$

mit der Eigenschaft, dass $f|_{(-\infty,0]} = 0$, $f|_{[1,\infty)} = 1$.
Sei $p \geq 1$. Konstruieren Sie eine C^p-Funktion derselben Form.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**
Zeige, dass jeder Ringhomomorphismus $F\colon K \to L$ zwischen reell abgeschlossenen Körpern ordnungstreu ist.

Aufgabe 3 (7 Punkte)**.**

(a) Sei P eine Präordnung auf einem Körper K. Zeige, dass sich das Element 0 durch keine nicht-triviale Summe von Elementen aus P darstellen lässt.

Betrachte nun einen Positivbereich P auf einem Körper K sowie eine nichtausgeartete Bilinearform φ auf K^n. Wir nehmen an, dass es Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von K^n so gibt, dass $\varphi(v_i, v_j) = \varphi(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$ mit

$$\varphi(v_i, v_i) \in P \iff i \leq r \text{ und } \varphi(w_j, w_j) \in P \iff j \leq s.$$

b) Schließe aus der Teilaufgabe (a), dass $r = s$.

Hinweis: Kann v_i mit $i \leq r$ im $\operatorname{Span}(w_{s+1}, \ldots, w_n)$ liegen?

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**
Sei $(K, <)$ ein angeordneter Körper und $a \neq 0$ ein Element aus K, welches eine Summe dreier Quadrate aus K ist.

(a) Begründe, dass es eine echte Körpererweiterung L von K und ein Element α in L mit $\alpha^2 = -a$ gibt.

(b) Schließe daraus, dass -1 eine Summe zweier Quadrate aus L ist.

Hinweis: Was ist $(A + BC)^2 + (B - AC)^2$?

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.